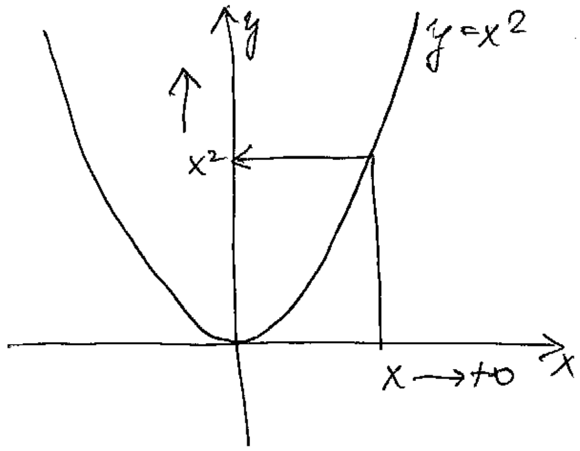
MA1 – přednáška 9.10.2019

I. Limity „intuitivně"

(1) Na konci minulé přednášky – už jsme „zkusili" popsat graf funkce $f(x) = x^2$ u $\pm\infty$



pro $x \to +\infty$ hodnoty $f(x) = x^2$ se stále zvětšují, „asi" též $x^2 \to +\infty$ pro $x \to +\infty$, budeme psát (symbolika limit)

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

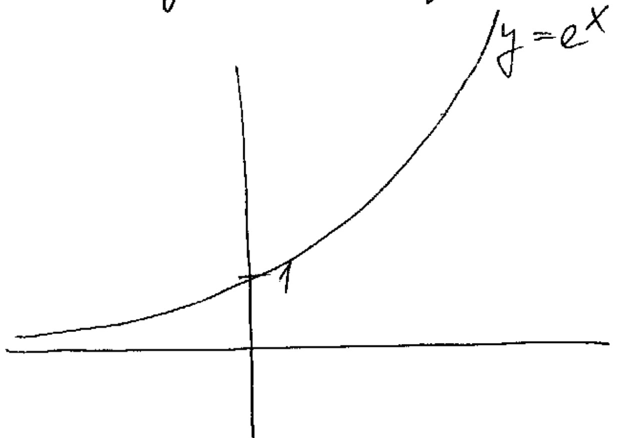
(obecněji $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Stejně se chovají funkce: $f(x) = x^n$, $n \in N$;

$f(x) = \sqrt[n]{x}$,

$f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$

(a „další" vymyslete sami)



a u „druhého" ∞ – ? $x \to -\infty$

Vidíme (a snad už přijmeme), že (asi) $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$,

tak $\lim_{x\to+\infty} x^{2k} = +\infty$ $(k \in N)$

ale $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ (hodnoty jsou v absolutní hodnotě „čím dál tím větší", asi nejsou ničím omezené, ale jsou záporné)

stejně $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1} = -\infty$, $k\in N$, nebo také $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\sqrt{x}) = -\infty$

(a dále hledejte sami).

Ale „jinak" se chová „u $(-\infty)$" fce $f(x)=e^x$ – pro $x\to-\infty$ hodnoty e^x jsou čím dál tím menší, kladné stále, ale když se dost „daleko" vlevo na ose x dostanu lib. blízko ~~ose x~~ k 0 (tj. graf se „lepí" na osu x) – budeme psát

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 .$$

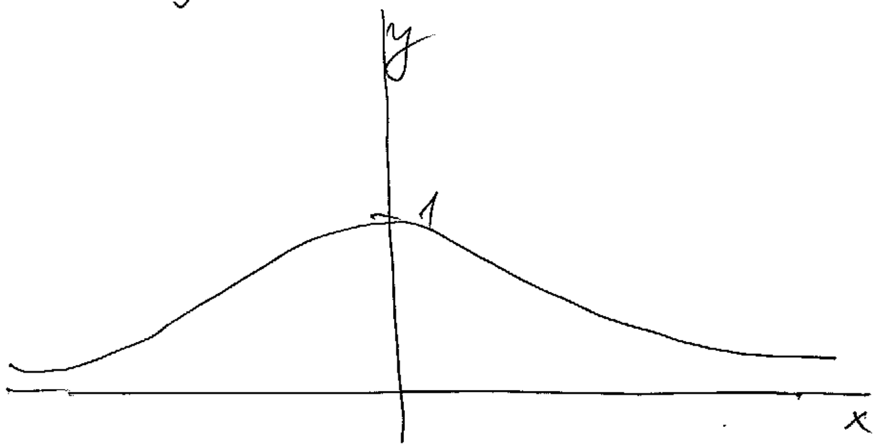
Dále (třeba) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+3)=3$ (zejména – stále se řídíme intuicí)

(? umíte si představit graf funkce $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$? –
– fce def. v R, sudá, $\dfrac{1}{x^2+1}>0$ v D_f, $f(0)=1$, pro x zvětšující se se zlomek $\dfrac{1}{x^2+1}$ zmenšuje, tj. f je klesající v $\langle 0,+\infty)$, a hodnoty se „blíží" k nule, tj. graf je asi

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(„čip“)



(limity můžeme pozorovat zde ze „zobrazení“ grafu funkce – – důležité!)

Body $+\infty, -\infty$ – nazývají se nevlastní body, a limity pro $x \to \pm\infty$ se nazývají limity v nevlastním bodě $+\infty$ (nebo $-\infty$).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ –

– nevlastní limity (tj. $f(x) \to \pm\infty$ $(-\infty)$) v nevlastním bodě

$\lim\limits_{x \to +\infty\ (-\infty)} f(x) = L \in R$ – vlastní limita v nevlastním bodě

„Limity“ se dělají pro $x \to a$, $a \in R$? – ano ∇ (určitě!)
(limity ve vlastním bodě)

Pozorování: u všech zatím uvažovaných funkcí v libovolném bodě $a \in Df$ je zřejmě

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

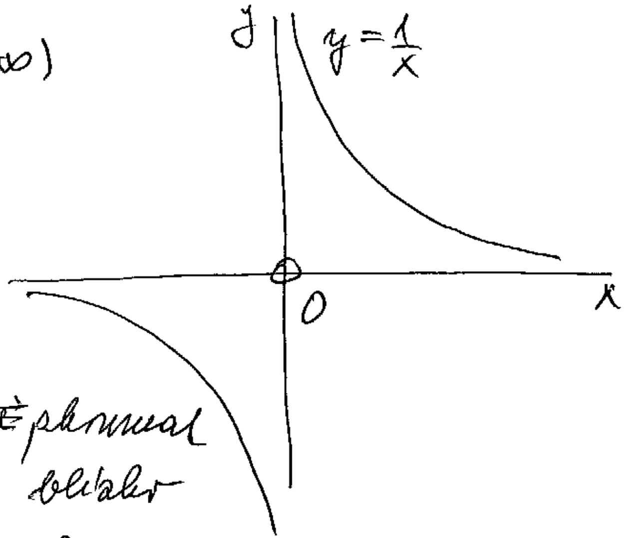
(a graf, dle pozorování, není „roztržený“ – učeně v „matematice“)

<u>Def.</u> f je spojitá v bodě <u>a</u>, když $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

<u>A teď dále budeme „abnormal" limity ve vlastním bodě</u> –

- <u>$\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$</u> – vlastní limita ve vlastním bodě (viz definice spojitosti fce)

- $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



graf (známý)

„už známe": $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$,

a vidíme, že také existuje je abnormal lt a vidí, jak se chová funkce blízko těch bodů, které nemá definované, zde pro $x \to 0$! Co vidíme?

$f(x) = \frac{1}{x} \to +\infty$ (libovolně se stále zvětšuje), pro $x \to 0$, ale $x > 0$!

a $\frac{1}{x} \to -\infty$ pro $x \to 0$, ale $x < 0$!

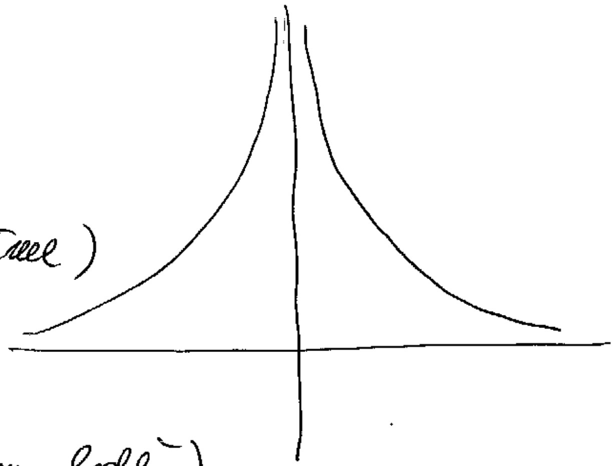
Každá „část" grafu míří jinam, ne limitě se neshodnou, ale aspoň

zprava $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, zleva $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

(<u>jednostranné limity</u> – limita zprava, resp. zleva)
(ve vlastním bodě)

a vidíme, že funkce (zde $f(x) = \frac{1}{x}$) v bodě 0 limitu nemá (oboustrannou)

„Hezčí" příklad: $f(x) = \frac{1}{x^2}$



zde limita pro $x \to +\infty$ existuje
(zatím tušíme a vidíme) a (píšeme)

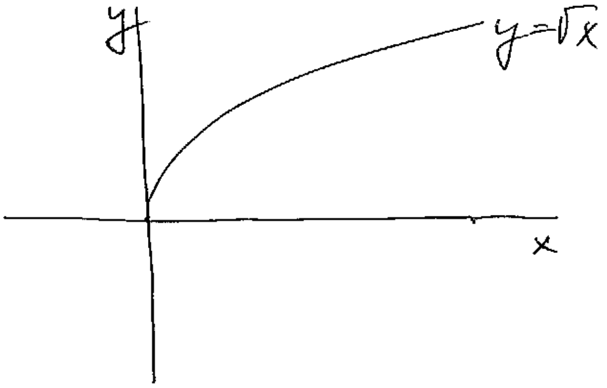
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

(nevlastní limita $+\infty$ ve vlastním bodě)

(stejně tak $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$, ale $\lim_{\substack{x \to a \\ a \neq 2}} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(a-2)^2}$)

Příklady limit „dalších hezkých" funkcí (intuitivně)

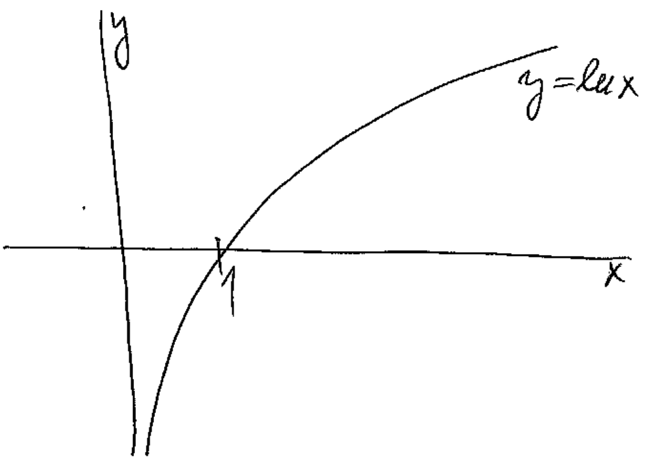
$f(x) = \sqrt{x}$



$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$$ (spojitá funkce v 0 zprava)

$f(x) = \ln x$

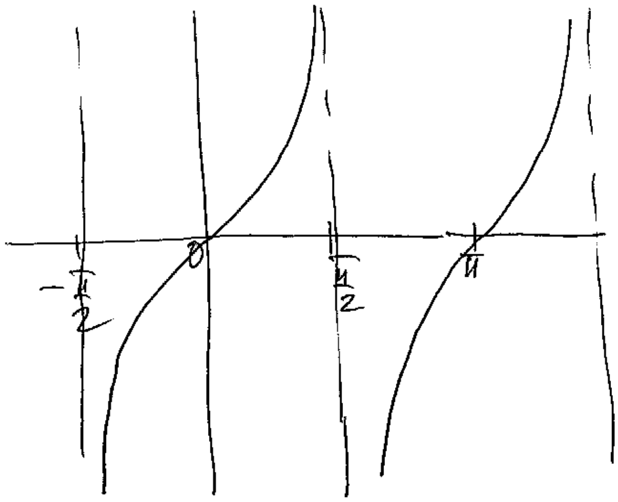


$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$$

spojitá funkce v $(0, +\infty)$
(tj. v každém bodě z D_f)

<u>$f(x) = \operatorname{tg} x$</u>



$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$

<u>Příklad funkce nespojité</u> – tj. funkce, která v bodě, kde je definována, má limitu různou od funkční hodnoty, nebo limitu nemá

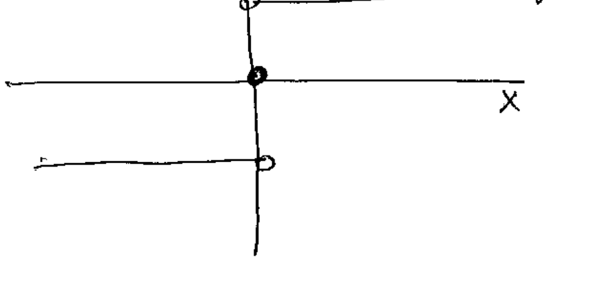
(tedy $\lim_{x \to a+} f(x) \neq \lim_{x \to 0+} f(x)$ – f nemá oboustrannou limitu)

<u>$f(x) = \operatorname{sgn} x$</u> ;

$\operatorname{sgn} x = 1$ pro $x > 0$
$\operatorname{sgn} 0 = 0$
$\operatorname{sgn} x = -1$ pro $x < 0$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1 \\ &\lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{sgn} x$ nemá v bodě 0 limitu – není spojitá v bodě 0



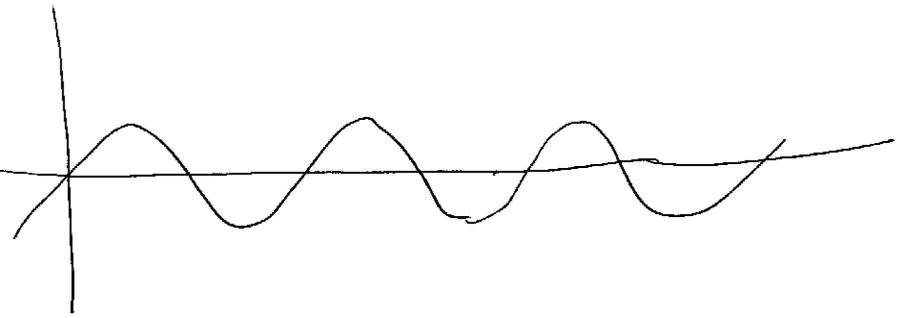
; ale ani $|\operatorname{sgn} x|$ není spojitá –

$$\left.\begin{aligned} &\text{zde } \lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1, \\ &\text{ale } \operatorname{sgn} 0 = 0 \end{aligned}\right\} !$$

Ještě jedna „situace" v „limitění"

? $f(x)=\sin x$, ? má tato funkce limitu pro $x\to+\infty\ (-\infty)$

Asi všichni „vidí", že ne! (z grafu) – neustále se „vlní", „nikam" se neblíží!

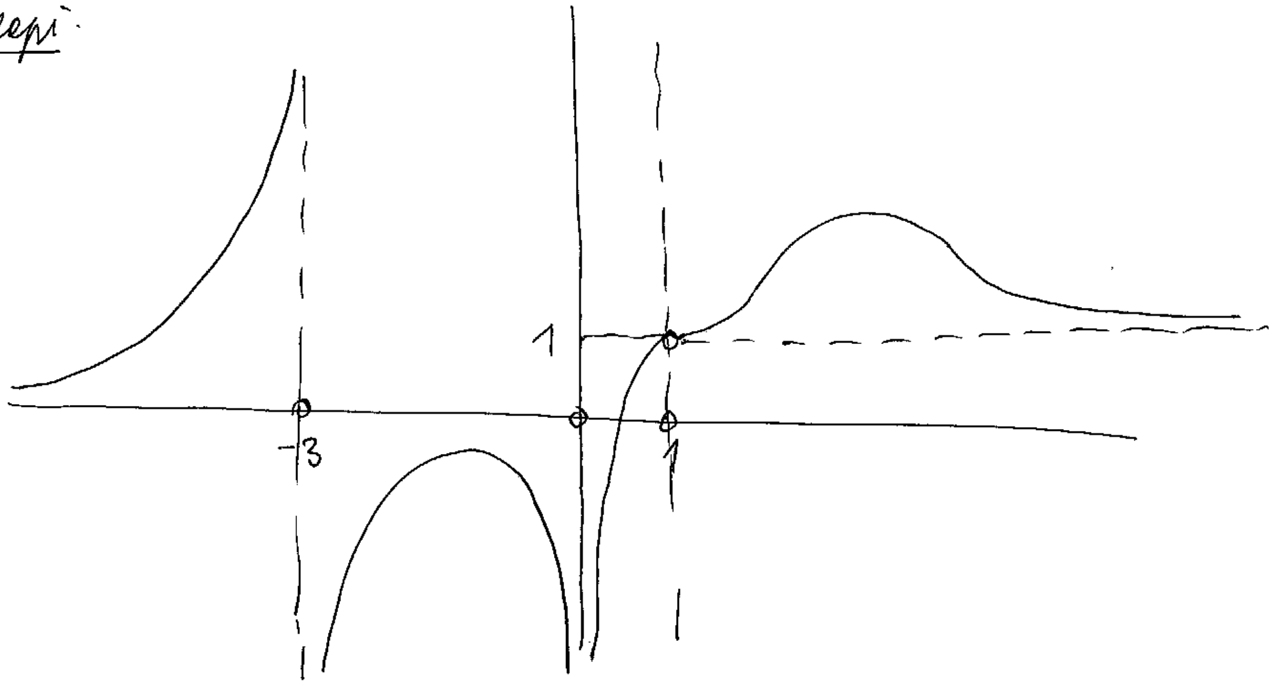


A co $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x)$ – dovedete odhadnout? („vidíte" graf?)

nebo $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ – limity v $\pm\infty$, v $0\pm$? a třeba se pokuste i odhadnout graf (přesněji uvidíme diferenciálním počtu za nějaký čas)

Budeme umět najít limity „složitějších" funkcí pomocí znalosti limit těch základních, „jednodušších"? Ukážeme si ani podrobné důkazy předchozích příkladů, dnes bychom nemohli ještě uvést „pochopení" pojmu limita, a udělal několik pokusů, přesněji bychom přesně vyjádřili, co znamenají jednotlivé „druhy" limit a ukázali, co a jak lze počítat, a tedy budeme umět s početními problémy a jak je vyřešíme, Pokus 1. – „popis" grafu f a jeho „limit" (tj. limit fce f)

Např.:



Zde:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-3-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-3+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, v Df je f spojitá

Pokus 2. – „studenti" sami – řekneme, jak si přejí Df a limity v bodech, které jsou krajními body intervalů z Df –

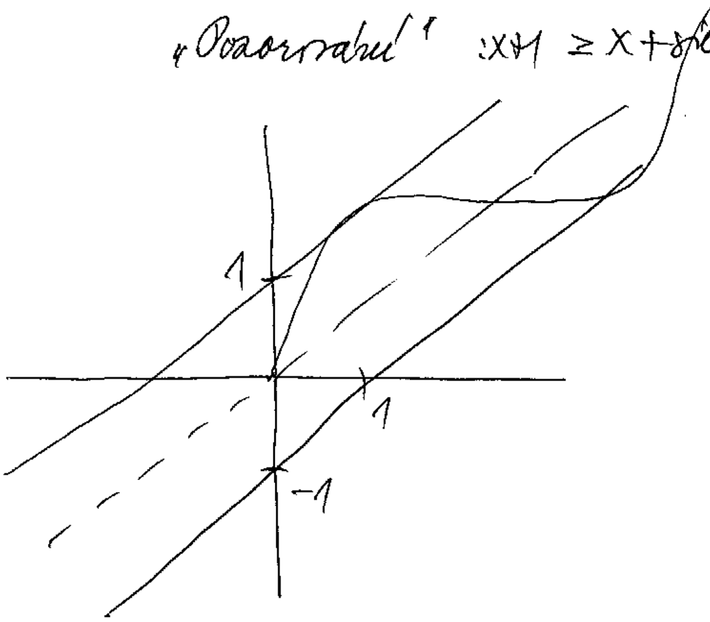
– a zkusíme „nakreslit" graf takové funkce

Pokus 3. $f(x) = x + \sin x$

„Pozorování": $x+1 \geq x + \sin x \geq x - 1$, $f(k\pi) = k\pi$

asi $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \sin x) = +\infty$!

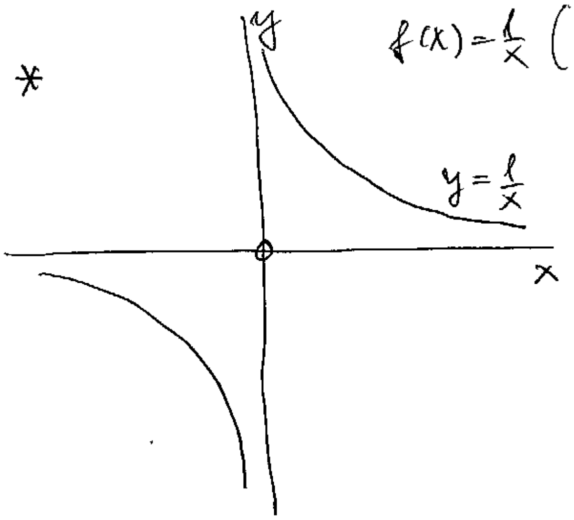
(důležité pozorování!)

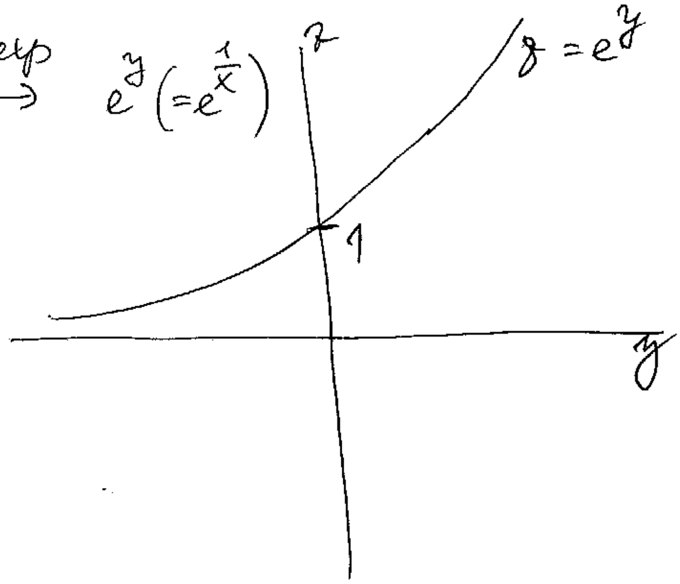


Pokus 4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ – pokusíme se o graf této složené funkce pomocí vlastností grafů fcí základních – tj. $g(x) = \frac{1}{x}$, a $f(x) = e^x$

$$f(x) = \frac{1}{x} \; (= y) \xrightarrow{\exp} e^y \; (= e^{\frac{1}{x}})$$

*





1) $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x) > 0$ v D_f;

2) když $x \to a$, $a \neq 0$, $\frac{1}{x} \to \frac{1}{a}$, $e^y \to e^{\frac{1}{a}}$ (spojitost fcí $\frac{1}{x}, e^x$)
$y = \frac{1}{x}$.

tj. $f(x)$ je spojitá v každém bodě z D_f

3) v $(0, +\infty)$: $\frac{1}{x}$ je klesající, exp rostoucí $\Rightarrow$ $e^{\frac{1}{x}}$ klesající
(? ~~...~~ umíte dokázat?) (a dokonce obecně)

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \underset{\exp \uparrow}{\Rightarrow} e^{\frac{1}{x_1}} > e^{\frac{1}{x_2}} \; !$$

analog. se podaří v $(-\infty, 0)$, tj. daná fce klesá v intervalu $(-\infty, 0)$ i v $(0, +\infty)$ – abychom zjistili, „odkud" klesá a „kam" doklesá – k tomu nám poslouží limity:

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to 0} e^y = e^0 = 1$$
spojitost exp.

(pohled na tabulku *)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \left(\frac{1}{x} = y\right)$$

analog. $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to 0} e^y = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

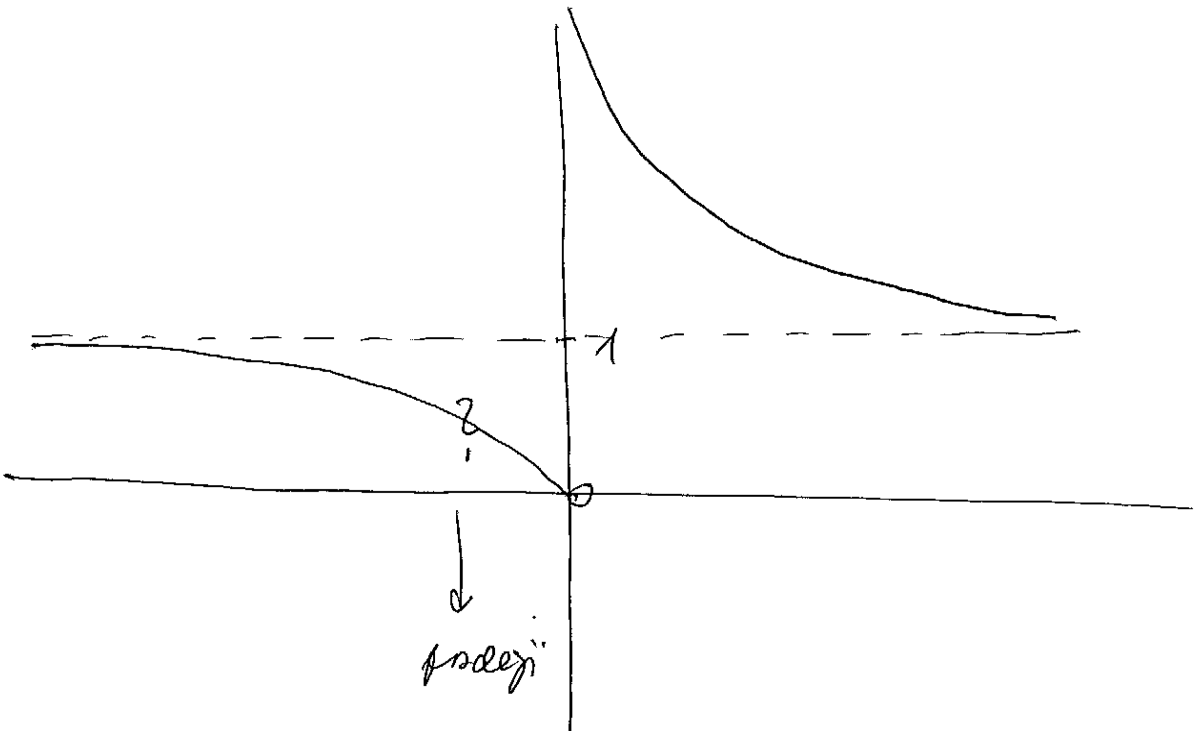
teď limity pro $x \to 0$: $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$, tedy

„(asi)" $\lim_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

a „poslední" limita $\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to -\infty} e^{y} = 0$ (tabulky)

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

a snad umíme si představit graf!



Poznámka – jak si představit funkci, pro kterou je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ (obecně $L \in R$)

$f(x) \cong L$ někde „daleko" na ose x, tj: nakreslíme konstantní fci $g(x)=L$ a graf $f(x)$ se k této přímce (asymptota grafu) přibližuje („lepí")

Příště – definice a „ostatní" limit.